

Terminale S - Exercices de Choix
Fonction Exponentielle.

1/18

43p 140

Toutes ces fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme sommes d'exponentielles.

$$A = (\exp(-x))^2 = (e^{-x})^2 = e^{2x(-x)} = e^{-2x}$$

$$B = \frac{\exp(-x+4)}{\exp(x+4)} = \frac{e^{-x+4}}{e^{x+4}} = e^{(-x+4)-(x+4)} = e^{-x+4-x-4} = e^{-2x}$$

$$C = (\exp(x+3) \times \exp(-2x-2))^2 = (e^{x+3} \times e^{-2x-2})^2 = (e^{x+3-2x-2})^2 = (e^{-x+1})^2 = e^{-2x+2}$$

45p 140

$$1) 4e^{4x}(-5e^{-3x+2}) = 4 \times (-5) \times e^{4x} \times e^{-3x+2} = -20e^{4x-3x+2}$$

$$= -20e^{x+2}$$

recommandation
(a+b)(a-b)

$$2) \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} \times \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} = \frac{(e^{3x} + e^{-3x})(e^{3x} - e^{-3x})}{4} = \frac{1}{4} [(e^{3x})^2 - (e^{-3x})^2] = \frac{1}{4} [e^{6x} - e^{-6x}] = \frac{e^{6x} - e^{-6x}}{4}$$

$$3) \frac{e^{-3x+5}}{e^{-2x-6}} \times (e^{x+2})^2 = e^{2x+6} \times [e^{-3x+5} \times e^{3x+6}] = e^{2x+6} \times e^{-3x+5+3x+6} = e^{2x+6} \times e^{11} = e^{2x+17}$$

$$4) e^{2x+5} \times (e^{-x+1})^3 \times (e^{2x-2})^2 = e^{2x+5} \times e^{-3x+3} \times e^{4x-4} = e^{2x+5-3x+3+4x-4} = e^{4x+4} = (e^{x+1})^4$$

47. p. 160

2/8

$$1^{\circ}) \frac{e^{-x}}{e^{-x} + x^2} = \frac{1}{1 + x^2 e^x}$$

penser aux "produits en croix" !
 $\Leftrightarrow e^{-x}(1 + x^2 e^x) = 1 \cdot (e^{-x} + x^2)$

$$\Leftrightarrow e^{-x} + x^2 e^{-x+x} = e^{-x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} + x^2 \underbrace{e^0}_{=1} = e^{-x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} + x^2 = e^{-x} + x^2, \text{ vrai.}$$

$$2^{\circ}) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow (e^x - e^{-x})(1 + e^{-2x}) = (e^x + e^{-x})(1 - e^{-2x})$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{x-2x} - e^{-x} - e^{-x-2x} = e^x - e^{x-2x} + e^{-x} - e^{-x-2x}$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - e^{-x} - e^{-3x} = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^{-3x} = e^x - e^{-3x}, \text{ vrai.}$$

60 p. 161. (auf 6.3°)

$$1^{\circ}) e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - (e^x) = 0 \quad (\text{on peut poser } X = e^x, \text{ mais:})$$

(fonction définie sur $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow e^x [e^x - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x = 0 \text{ ou } e^x - 1 = 0) \quad (\text{produit nul})$$

$$\downarrow$$

(pas car $e^x > 0$)

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. ; S = \{0\}.$$

$$2^{\circ}) e^x = e^{\sqrt{x+1}}, \text{ défini pour } x+1 \geq 0, \text{ i.e. sur } [-1; +\infty[.$$

L'exponentielle est une bijection :
 • chaque antécédent a une image e^x unique
 • chaque image e^x a un antécédent unique.

$$\text{Donc } \underbrace{e^x = e^{\sqrt{x+1}}}_{\text{même image}} \Leftrightarrow \underbrace{x = \sqrt{x+1}}_{\text{même antécédent}} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \text{ sur } [-1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5 > 0 ; x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$3^{\circ}) x e^x \leq 0 \quad (\text{bien défini sur } \mathbb{R}).$$

Or $e^x > 0$, donc $x e^x$ est du signe de x .
 Donc $x e^x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

$$S = \mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$$

5°) $e^{1-x^2} > 0$ (supérieur (défini sur $\mathbb{R}$), mais l'exponentielle est strictement positive, donc $e^{1-x^2} > 0$.
Donc $S = \emptyset$

62 p. 141.

1°) $e^{\frac{1}{x}} \leq e^{2x-1}$ où la fonction exponentielle est strictement croissante (bien défini sur $\mathbb{R}^+$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 2x-1 \quad (\text{sur } \mathbb{R}^+)$$

$$\Leftrightarrow 2x-1-\frac{1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{x} \geq 0 \quad \Delta = 9; x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x} \geq 0$$

On dresse un tableau de signes:

x	$-\frac{1}{2}$	0	1
$\frac{x}{x}$	-	-	+
$x-1$	-	-	0
$x+\frac{1}{2}$	-	0	+
$\frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x}$	-	0	+

$$S = [-\frac{1}{2}; 0[\cup [1; +\infty[$$

2°) $e^{5x} - e^{x^2-3x-9} > 0$, bien défini sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e^{5x} > e^{x^2-3x-9}$, où la fonction exp. est strictement croissante

$$\Leftrightarrow 5x > x^2-3x-9$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x-9 < 0 \quad \Delta = 100; x_1 = -1; x_2 = 9$$

$$S =]-1; 9[\quad (\text{le trinôme est "du signe de } a \text{ à l'extérieur des racines"}).$$

3°) $e^{x^2} e^x \geq (e^3)^2$ (bien défini sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow e^{x^2+x} \geq e^6$ où la fonction exponentielle est strictement croissante

$$\Leftrightarrow x^2+x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6 \geq 0 \quad ; \quad \Delta = 25; x_1 = -3; x_2 = 2$$

$$S =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$$

$$1.) e^{x^2-x} < e \quad (\text{bien défini sur } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-x} < e^1, \text{ où la fonction exp. est strictement } \uparrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0; \Delta = 5; x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S =]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$$

6hp 161

$$1.) (x-1)e^{-\frac{1}{1+x^2}} < 0, \text{ bien défini sur } \mathbb{R} \text{ car } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$$

L'exponentielle est strictement positive, donc $(x-1)e^{-\frac{1}{1+x^2}}$ est du signe de $(x-1)$.

$$x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$S =]-\infty; 1[$$

$$2.) \frac{e^x - e}{e^{x+4} - 1} \geq 0 \quad \text{défini par } e^{x+4} \neq 1$$

On dressa un tableau de signes:

$$e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e \Leftrightarrow e^x \geq e^1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$e^{x+4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x+4} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x+4} \geq e^0 \Leftrightarrow x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$e^x - e$	-	-	0	+
$e^{x+4} - 1$	-	0	+	+
$\frac{e^x - e}{e^{x+4} - 1}$	+		- 0 +	+

$x = -4$ est une "valeur interdite" car alors le dénominateur serait nul.

$$S =]-\infty; -4[\cup [1; +\infty[$$

$$3.) e^{x^2} \cdot e^x \geq (e^3)^2, \text{ bien défini sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2+x} \geq e^6, \text{ où la fonction exp est strictement croissante.}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 \geq 0; \Delta = 25; x_1 = -3; x_2 = 2$$

$$S =]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$$

$$4.) e^{x^2-x} < e, \text{ bien défini sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-x} < e^1, \text{ où exp est strictement } \uparrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0 ; \Delta = 5 ; x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S =] \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$$

5°) $e^{2-x} \times e^{-1+3x} < (e^4)^2$, bien défini sur $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow e^{2-x-1+3x} < e^8$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1} < e^8, \text{ à exp } \uparrow \text{ st.}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < 8$$

$$\Leftrightarrow 2x < 7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{2} ; S =]-\infty ; \frac{7}{2} [$$

6°) $\frac{e^x-1}{x} > 0$, défini sur $\mathbb{R}^*$.

On va dresser un tableau de signes. $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0$
 $\Leftrightarrow x > 0$ (exp $\uparrow$).

x	0
$e^x - 1$	- 0 +
x	- 0 +
$\frac{e^x-1}{x}$	+ +

$$S = \mathbb{R}^*$$

Exercice 2.

1°) $e^{3x} = 24 - 5e^x$ (bien défini sur $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow e^{3x} + 5e^x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 5(e^x) - 24 = 0. \text{ On pose } X = e^x$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 5X - 24 = 0 ; \Delta = 121 ; x_1 = -8 ; x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow X = -8 \text{ ou } X = 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -8}_{\text{impossible car exp} > 0} \text{ ou } e^x = 3$$

(on aura donc $x = \ln$)

$$\Rightarrow e^x = 3 \quad (\text{on aura donc } x = \ln(3))$$

$$2^{\circ}) e^{-x} - 3e^x = -1$$

(bien défini sur $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - 3e^x = -1$$

(en multipliant par e^x)

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x} - 3(e^x)^2 = -e^x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3(e^x)^2 + e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(e^x)^2 + e^x + 1 = 0$$

on pose $X = e^x$.

$$\Leftrightarrow -3X^2 + X + 1 = 0;$$

$$\Delta = 13; \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

impossible car $\frac{1 - \sqrt{13}}{6} < 0$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} < 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}} \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

(on en déduira $x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)$).

107 p. 146.

$$1^{\circ}) f(x) = e^{x^2 - 3x}$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'une polynôme par la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 3x)' \times e^{x^2 - 3x} \\ &= (2x - 3) e^{x^2 - 3x} \end{aligned}$$

$$2^{\circ}) g(x) = e^{\sin x}$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de la fonction sinus par la fonction exponentielle.

$$g'(x) = (\sin x)' \times e^{\sin x} = \cos x \times e^{\sin x}$$

$$3^{\circ}) h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de la fonction inverse par la fonction exponentielle.

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

1°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{-\frac{2}{x^2}}$ (bien définie par $x \neq 0$)

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée d'une fraction rationnelle par la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\frac{2}{x^2}\right)' \times e^{-\frac{2}{x^2}} \\ &= (-2 \times x^{-2})' \times e^{-\frac{2}{x^2}} \\ &= (-2 \times (-2) \times x^{-3}) \times e^{-\frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{4}{x^3} e^{-\frac{2}{x^2}} \end{aligned}$$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)e^{-3x}$ (bien définie sur $\mathbb{R}$).

En tant que produit d'un polynôme (affine) et de la composée d'un polynôme ($-3x$) par la fonction exponentielle, g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[\underbrace{(2x+1)}_u \times \underbrace{e^{-3x}}_v \right]' \\ &= \underbrace{2}_{u'} \times \underbrace{e^{-3x}}_v + \underbrace{(2x+1)}_u \times \underbrace{(-3) \times e^{-3x}}_{v'} \\ &= 2e^{-3x} - 3(2x+1)e^{-3x} \\ &= (2 - 6x - 3)e^{-3x} \\ &= (-6x - 1)e^{-3x} \\ &= -(6x+1)e^{-3x} \end{aligned}$$

3°) $h(x) = \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$

Est définie et dérivable, en tant que composée de fraction rationnelle et d'exponentielle, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur, mais on a $e^{3x} > 0$ (exponentielle), donc $e^{3x}+1 > 1 > 0$.

Donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \left(\frac{u \{ e^{3x} - 1 \}}{v \{ e^{3x} + 1 \}} \right)'$$

$$h'(x) = \frac{(e^{3x}-1)'(e^{3x}+1) - (e^{3x}-1)(e^{3x}+1)'}{(e^{3x}+1)^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{u'v - uv'} \\ \text{a}^2 \end{array} \right\} \text{8/18}$$

$$= \frac{3e^{3x}(e^{3x}+1) - (e^{3x}-1) \cdot 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$$

$$= \frac{3(e^{3x})^2 + 3e^{3x} - 3(e^{3x})^2 + 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$$

$$= \frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$$

← ne pas développer; penser à une future étude de signe: « qui dit signe dit factorisation »!

$$1^{\circ}) i(x) = x^2 e^{-x^2}$$

i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction cosé et de la composée d'un polynôme par l'exponentielle.

$$i'(x) = \left[\underbrace{x^2}_u \times \underbrace{e^{-x^2}}_v \right]'$$

$$= \underbrace{2x}_u' \times \underbrace{e^{-x^2}}_v + \underbrace{x^2}_u \times \left[\underbrace{e^{-x^2}}_v \right]'$$

$$= 2x e^{-x^2} + x^2 \times \left[-2x \times e^{-x^2} \right]$$

$$= 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2}$$

$$= (1-x^2) \times 2x e^{-x^2}$$

$$= 2x e^{-x^2} (1-x^2)$$

Exercice 114.

1^o) $f(x) = e^{x^2-6x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'un polynôme par la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= (x^2-6x+1)' \times e^{x^2-6x+1} \\ &= (2x-6) \times e^{x^2-6x+1} = 2(x-3) e^{x^2-6x+1} \end{aligned}$$

2°) $g(x) = \frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x}}$ où $\forall y = \sin x \in \mathbb{R}, e^y > 0$ 9/8
 donc $e^{\sin x} > 0$ et a priori $e^{\sin x} \neq 0$.

En tant que quotient de deux exponentielles, lesquelles s'appliquent à des fonctions trigonométriques, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) &= \left(\frac{e^{\cos x}}{e^{\sin x}} \right)' \\ &= \frac{(e^{\cos x})' \cdot e^{\sin x} - e^{\cos x} \cdot (e^{\sin x})'}{(e^{\sin x})^2} \quad \left\{ u'v - uv' \right\} \\ &= \frac{(-\sin x e^{\cos x}) e^{\sin x} - e^{\cos x} (\cos x e^{\sin x})}{e^{2\sin x}} \\ &= \frac{-\sin x e^{\cos x} e^{\sin x} - \cos x e^{\cos x} e^{\sin x}}{e^{2\sin x}} \\ &= \frac{(-\sin x - \cos x) e^{\cos x + \sin x}}{e^{2\sin x}} \\ &= -\frac{(\sin x + \cos x) e^{\sin x + \cos x}}{e^{2\sin x}} \end{aligned}$$

93p 143

1°) $f: x \mapsto x - e^x$ (et dérivable) est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de polynôme et de la fonction exponentielle.

• limite en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$$

Par somme: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^x = \underline{-\infty}$

• limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty$$

On a $+\infty - \infty$: forme indéterminée.

On factorise « le plus gros infini »: c'est l'exponentielle.

$$f(x) = x - e^x = e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right)$$

Or d'après le cours (Pte 10.5), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Par parax à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) = -1$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} - 1 \right) = -\infty$

2°) $g: x \mapsto e^{x^2-x}$ est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'un polynôme par l'exponentielle.

• limite en $-\infty$:

En tant que polynôme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-x} = +\infty$

• limite en $+\infty$:

En tant que polynôme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-x} = +\infty$

3°) $h: x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'un polynôme par la fonction exponentielle. (on peut voir que h est paire)

• limite en $-\infty$:

Par quotient $\left(-\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{(-2)} \right)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = -\infty$

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \underline{0}$

• limite en $+\infty$

Par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2}{2}\right) = -\infty$; par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \underline{0}$

Donc L admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

1°) $k: x \mapsto e^x - e^{-x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de deux exponentielles.

• limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \underline{-\infty}$

• limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \underline{+\infty}$

96 p. 163

1°) $f: x \mapsto (x-5)e^{-x}$ est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'un polynôme par une exponentielle.

• limite en $-\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{-\infty}$$

• limite en $+\infty$

En $+\infty$, on a : $\underbrace{(x-5)}_{+\infty} \times \underbrace{e^{-x}}_0$ une forme indéterminée.

$$f(x) = (x-5)e^{-x} = (x-5) \times \frac{1}{e^x} = \frac{x-5}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{5}{e^x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (carré), par passage à l'inverse: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$.

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{e^x} = 0^-$, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{0}$ (asymptote horizontale)

2°) $g: x \mapsto \frac{x+1}{e^x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $e^x > 0$,
donc $e^x+1 > 1 > 0$.

12/18

g est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$ comme quotient d'un polynôme et d'une exponentielle.

• limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \text{ (par somme)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x+1) = 0+1 = 1 \text{ (par somme)}$$

} donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ (par quotient)

• limite en $+\infty$: $g(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \rightarrow \frac{1}{+\infty} \rightarrow 0^+$ (asympt. hor.).

3°) $h: x \mapsto \frac{e^{2x}}{x+4}$

est définie et dérivable par $x+4 \neq 0$
on tant que c'est le quotient d'une exponentielle
par une fraction rationnelle.
 $D_h = D_{h'} = \mathbb{R} - \{-4\}$.

• limite en $-\infty$

$$\frac{e^{2x} \rightarrow 0}{x+4 \rightarrow -\infty} \} \text{bravillon}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ (par composition)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x+4 = -\infty \text{ (par somme)}$$

} donc par quotient:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$$

• limite en -4 , $x < -4$

$$e^{2x(-4)} = e^{-8} > 0; \lim_{x \rightarrow -4} x+4 = 0^-;$$

$$\text{par quotient, } \lim_{x \rightarrow -4} h(x) = -\infty$$

• limite en -4 , $x > -4$

$$e^{2x(-4)} = e^{-8} > 0; \lim_{x \rightarrow -4} x+4 = 0^+;$$

$$\text{par quotient, } \lim_{x \rightarrow -4} h(x) = +\infty$$

} On a une asymptote
verticale d'équation
 $x = -4$.

• limite en $+\infty$

$$\frac{e^{2x} \rightarrow +\infty}{x+4 \rightarrow +\infty} \} \text{bravillon: forme indéterminée}$$

$$h(x) = \frac{e^{2x}}{x+4}, \text{ on pose } x = 2x; \text{ alors } x = \frac{x}{2}$$

$$h(x) = \frac{e^x}{\frac{x}{2}+4} = \frac{2e^x}{x+8} = 2 \times \frac{e^x}{x+8} \times \frac{x}{x} = H(x).$$

) "bravillon"

Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

13/18

D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

En tant que fraction rationnelle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

4.) $k: x \mapsto \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1}$

On a $e^{3x} > 0$, donc $e^{3x} + 1 > 1 > 0$. Donc en tant que composée d'éléments par une fraction rationnelle, k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$k(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = \frac{(e^x)^2 - e^x}{(e^x)^3 + 1}$$

• limite en $-\infty$

$$k(x) = \frac{e^x (e^x - 1)}{(e^x)^3 + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ (cours); par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (e^x - 1) = 0^-$.

Par composition par la fonction cube, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^3 = 0^+$.

Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^3 + 1 = 1$.

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0^-$ (asymptote horizontale).

• limite en $+\infty$

On aurait une forme indéterminée $+\infty - \infty$ au numérateur donc on « factorise la plus grande puissance e^{3x} »

$$k(x) = \frac{e^x (e^x - 1)}{(e^x)^3 + 1} = \frac{e^{3x} (e^{-2x} - e^{-3x}) (e^{\frac{3x}{e^x}})}{e^{3x} (1 + \frac{1}{e^{3x}})} = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{1 + \frac{1}{e^{3x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0^+$$

Par composition:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x})^3 = 0^+; \text{ par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - e^{-3x}) = 0$$

Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^3 = +\infty$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{3x}} = 0^+$

Par saune, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^{3x}} = 1$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \underline{0}$ (asymptote horizontale).

12. p. 168

$f: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = (1+x)e^{-x}$

a) On sait que produit d'un polynôme et d'une exponentielle, f est dérivable et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc $f(x)$ est du signe de $1+x$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ (polynôme)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Il donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (polynôme)
mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ } forme indéterminée.

$$f(x) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x} + \frac{x}{e^x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; par prae $\in$ l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.

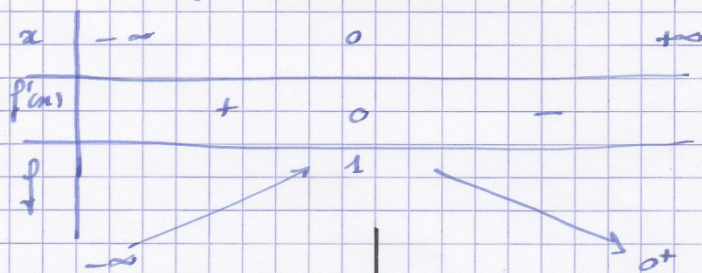
Il finalement, par somme on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ (asymptote horizontale $y=0$).

c) On a vu en introduction que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \left[(1+x)e^{-x} \right]' = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_v + (1+x) \times \underbrace{(-1)e^{-x}}_{v'} \\ &= e^{-x} - (1+x)e^{-x} = (1-1-x)e^{-x} = \underline{-xe^{-x}} \end{aligned}$$

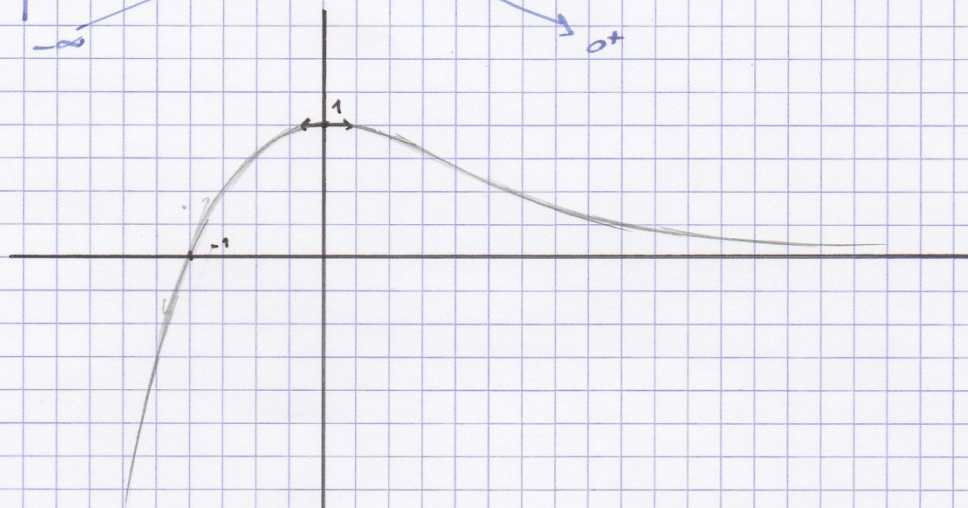
d) L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est du signe de $-x$.

15/18



$$f(0) = 1 \times e^0 = 1.$$

$$f(-1) = 1 \times e^1 = e$$



135 p 148, partie A (loi de Gumbel)

$f: x \mapsto e^{-x - e^{-x}}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée d'exponentielles.

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad f'(x) &= (-x e^{-x})' \times e^{-x - e^{-x}} \\ &= (-1 - (1)e^{-x}) \times e^{-x - e^{-x}} \\ &= (e^{-x} - 1) e^{-x - e^{-x}} \\ &= e^{-x} \times e^{-x - e^{-x}} > 0 \text{ (exponentielle)} \end{aligned}$$

2°) $f'(x)$ est du signe de $e^{-x} - 1$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \geq e^0 \quad (\text{et exp est strict}^+ \text{ croissante})$$

$$\Leftrightarrow -x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0.$$

3°) limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$$

$x - e^{-x}$ est une

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, donc en $-\infty$, $-x - e^{-x}$ est une forme ^{16/18} indéterminée.

$$-x - e^{-x} = -x - \frac{1}{e^x} = \frac{-xe^x - 1}{e^x}$$

Or d'après le cours, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^x} \quad (\text{pe saune})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = -\infty$$

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{-xe^x - 1}{e^x}\right)} = \underline{0^+}$
(asymptote horizontale d'équation $y=0$)

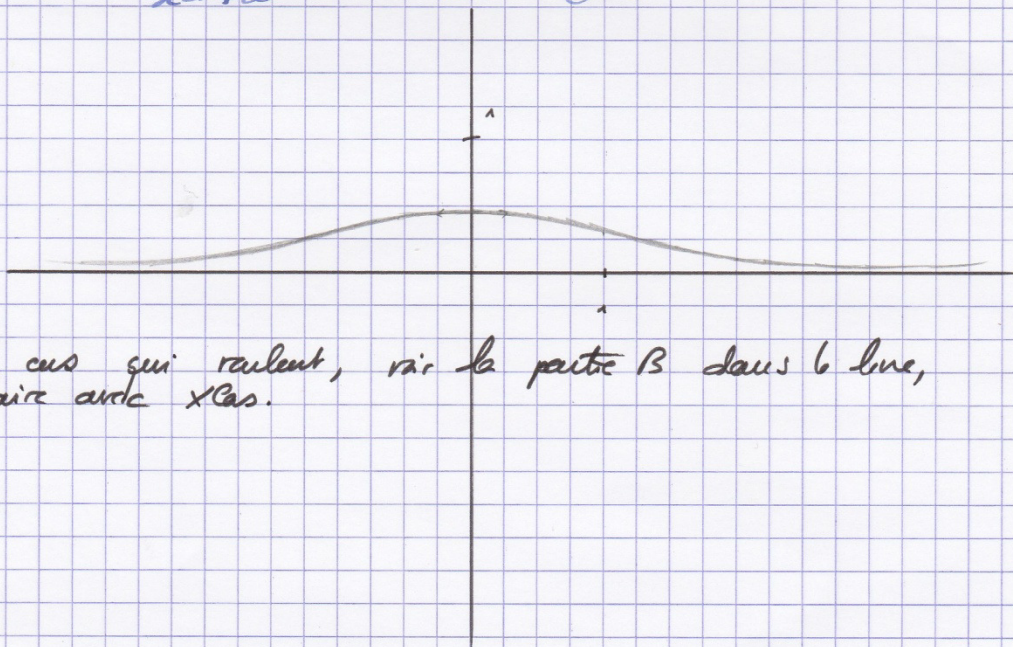
• limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

Par saune, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x - e^{-x} = -\infty$

Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{0^+}$ (asymptote horizontale d'équation $y=0$)

4.)



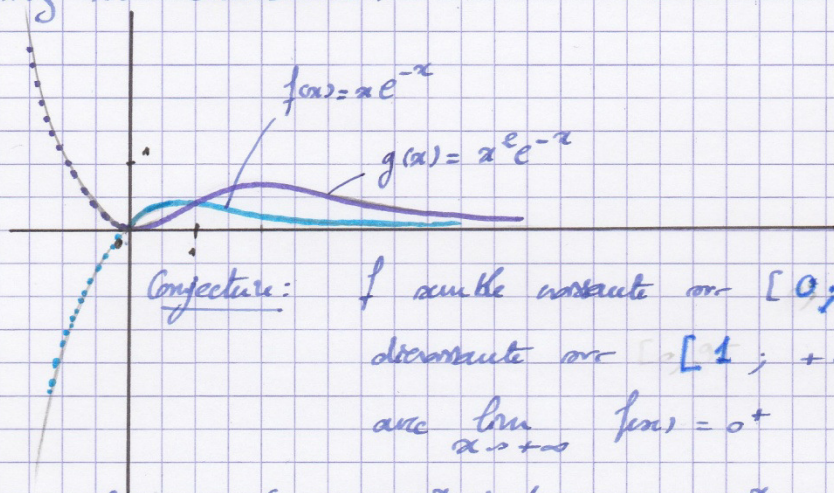
Par cas qui veulent, voir la partie B dans le livre,
à faire avec xCas.

150 p. 156.

$f: x \mapsto f(x) = x e^{-x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ 17/18
comme produit de polynôme et
exponentielle, donc a priori sur $\mathbb{R}_+$.

$g: x \mapsto g(x) = x^2 e^{-x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$
pour les mêmes raisons.

1°) (Utilisez vos calculatrices)



2°). $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = (x \times e^{-x})' = \underset{u \times v}{1 \times e^{-x}} + x \times \underset{u' \times v'}{(-e^{-x})}$
 $= e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) \underset{>0}{e^{-x}},$

qui est du signe de $(1-x)$

x	1
$f'(x)$	+
$f(x)$	0
$f(x)$	-

(la conjecture est validée)

• limite en $+\infty$

$$f(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

Or (cours) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; par passage à l'inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{0^+}$
(la conjecture est validée)

On a une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

3°) G semble être au-dessus de f pour $x \leq 1$,
et en dessous pour $x \geq 1$.

Pour le démontrer, on étudie le signe de $g(x) - f(x)$.

On note $h(x) = g(x) - f(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur $\mathbb{R}_+$) en tant que somme de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 e^{-x} - x e^{-x} \\ &= (x^2 - x) \underbrace{e^{-x}}_{>0} \end{aligned}$$

$h(x)$ est du signe de $x^2 - x = x(x-1)$,

or on travaille sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \geq 0$ et $h(x)$ est du signe de $x-1$.

On a donc bien $\begin{cases} h(x) \geq 0 & \text{pour } x \geq 1 \\ h(x) \leq 0 & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$

i.e $\begin{cases} g(x) \geq f(x) & \text{pour } x \geq 1 \\ f(x) \geq g(x) & \text{pour } x \leq 1, \end{cases}$ ce qui confirme notre conjecture.

